فصل چهارم

گراف

اهداف:

در پایان این فصل انتظار می‌رود:

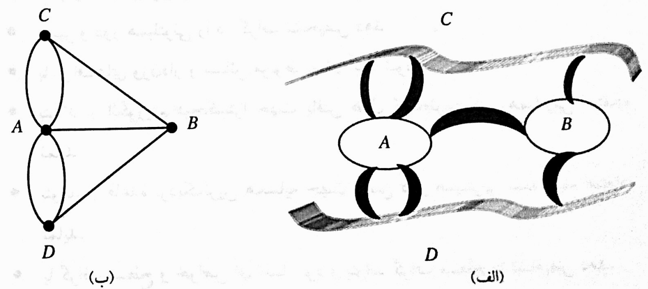
- دانشجو با مفهوم گراف، گراف جهت‌دار و زیرگراف آشنا شود.
- با نمایش گراف آشنا شود و بتواند گراف‌های یکریخت را تشخیص دهد.
- مفهوم مسیر و دور و کاربرد آن را بشناسد.
- گذر و مدارِ اویلری را در گراف تشخیص دهد.
- مسیر و دورِ همیلتونی را در گراف تشخیص دهد.
- با گراف‌های وزن‌دار و مسائل مربوط به آن آشنا شود.
- بتواند از الگوریتم دیجکسترا جهت یافتن طول کوتاه‌ترین مسیرهمیلتونی استفاده نماید.
- بتواند از قاعدهٔ نزدیک‌ترین همسایه جهت یافتن دور همیلتونی نیمه بهینه استفاده نماید.
- با گراف مسطح و خواص آن آشنا شود و بتواند گراف مسطح را تشخیص دهد.
- دانشجو بتواند با استفاده از الگوریتم‌های معرفی شده موضوعات مطرح در زندگی روزمره را که می‌توانند با گراف حل شوند، پاسخ دهد.

۴-۱- تاریخچه و تعاریف مقدماتیِ گراف

همان‌طور که در فصل دو دیده شد می‌توان رابطهٔ دوتایی روی مجموعه A را به عنوان زیرمجموعه‌ای از $A \times A$ تعریف نمود، و آن را با گراف یا ماتریس نمایش داد. در این فصل ابتدا تاریخچهٔ چگونگی تشکیل نظریهٔ گراف ارائه و سپس مفهوم گراف به صورت عمومی‌تر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در قرن هجده میلادی، شهر کونیگسبرگ[1] از دو ساحل یک رودخانه و دو جزیره تشکیل شده بود که ۷ پل این چهار منطقه را (مطابق شکل۴-۱(الف)) به هم وصل می‌کرد. معمایی سال‌ها شهروندان را به‌خود سرگرم کرده بود: که آیا امکان دارد با آغاز از یکی از این مناطق، در شهر گشتی زد به‌طوری‌که از هر پل فقط یکبار عبور نمود و به محل اولیه بازگشت؟

در سال ۱۷۳۶میلادی با حل این معما توسط اویلر[2]، نظریهٔ گراف‌ها پایه‌گذاری شد، بدین صورت که به هر ۴ منطقه، نقطه‌ای از صفحه اختصاص داده و به ازای هر پل واصل بین دو منطقه، پاره خط بین دو نقطه متناظر با آنها رسم نمود. بدین ترتیب مطابق شکل۴-۱(ب) به مدل ریاضی دست‌یافت و به سادگی پاسخ معما که منفی بود، مشخص گردید.



شکل ۴-۱.

۱. Kvnygsbrg

۲. Euler

ازگراف‌ها برای حل مسائل زیادی در ریاضیات و علوم کامپیوتر استفاده می‌شود. در علوم کامپیوتر، گراف‌ها در دروس مدارمنطقی (برای نمایش مدارها)، نظریهٔ زبان‌ها و ماشین‌ها (جهت رسم ماشین‌ها)، سیستم عامل (ارتباط بین حالت‌های یک فرآیند) و کامپایلر (رسم نمودارهای تغییر حالت) کاربرد زیادی دارند.

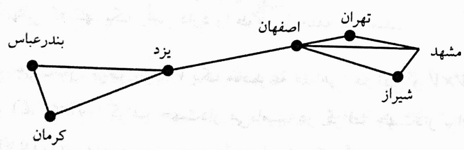
جهت نمایش ارتباط و لینک بین وب سایت‌ها نیز می‌توان از گراف استفاده نمود. برای این منظور هر وب سایت به صورت رأس و ارتباط و لینک بین وب سایت‌ها به صورت یال گراف نمایش داده می‌شود.

ازگراف‌ها در مسائلی مانند طراحی مدارهای الکتریکی، اصلاح هندسی خیابان‌ها، حل مشکل ترافیک نیز استفاده می‌شود.

هرگراف از دو مجموعهٔ $V \neq \phi$ به‌نام مجموعه رئوس و مجموعهٔ E به‌نام مجموعه یال‌ها تشکیل شده‌است. به‌طور معمول هر رأسِ گراف با یک نقطه یا دایره کوچک در صفحه نشان داده می‌شود؛ یال‌ها که نشان‌دهنده نحوهٔ ارتباط رئوس با یکدیگر می‌باشند، با یک پاره‌خط(جهت‌دار یا فاقدجهت) مشخص می‌شوند. مجموعه یال‌های یک گراف را می‌توان به‌صورت زیر تعریف نمود:

$$E = \{uv \mid u,v \in V, uRv\}$$

مثال ۴-۱: یک شرکت مخابراتی برای یکی از سرویس‌های شبکه‌ای خود، تعدادی دیتاسنتر را در شهرهای تهران، اصفهان، شیراز، مشهد، کرمان، یزد و بندرعباس راه‌اندازی نموده است. جهت مدل نمودن این سیستم‌ها و ارتباط آن‌ها می‌توان از گراف استفاده نمود؛ به‌طوری‌که محل هر دیتاسنتر به‌صورت یک رأس و ارتباط بین آنها به‌صورت یال نشان داده شود.

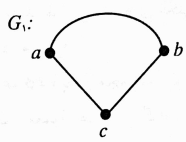


شکل ۴-۲.

گراف: فرض‌کنید V یک مجموعهٔ غیرتهیِ متناهی و E زیر مجموعه‌ای از مجموعه تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی V باشد، در این‌صورت $G=(V,E)$ را گراف می‌نامیم. همان‌طور که بیان شد، مجموعهٔ V را مجموعهٔ رئوس و E را مجموعهٔ یال‌ها گوئیم.

برای نمایش یالی که از دو رأس a و b عبور می‌کند، از نمایش $\{a,b\}$ یا ab استفاده می‌شود. در این کتاب نمایش ab مورد استفاده قرار می‌گیرد.

مثال ۴-۲: مجموعهٔ رئوس و یال‌های گراف G_1، در زیر نشان داده شده است.



شکل ۴-۳.

$V=\{a,b,c\}$
$E=\{ab,bc,ac\}$

گراف تهی: گرافِ بدون یال را گراف تهی می‌نامند. گراف تهی با N_p نشان داده می‌شود. گراف‌های تهی از مرتبهٔ ۱،۲،۳ و ۴ در شکل ۴-۴ نشان داده شده است.

شکل ۴-۴.

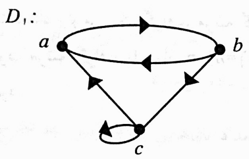
طوقه: یالی که تنها یک رأس دارد را طوقه یا حلقه می‌نامند.

گرافِ جهت‌دار: فرض‌کنید V یک مجموعهٔ متناهی غیرتهی و $E\subseteq V\times V$ باشد، در این‌صورت $D=(V,E)$ را گرافِ جهت‌دار می‌نامیم. در گرافِ جهت‌دار برای رئوس u و v، دو یال (u,v) و (v,u) (درصورت وجود) متمایز از یکدیگر می‌باشند.

مثال ۴-۳: مجموعهٔ رئوس و یال‌های گرافِ D_1، در زیر داده شده است. گراف را رسم نمایید.

$V=\{a,b,c\}$
$E=\{(a,b),(b,a),(b,c),(c,a),(c,c)\}$

حل:



شکل ۴-۵.

یال‌های موازی: هرگاه بین دو رأس یک گراف، بیش از یک یال موجود باشد، آن یال‌ها را یال‌های موازی گویند. درگراف جهت‌دار، یال‌های بین دو رأس را موازی نامند هرگاه یال‌ها، هم‌جهت باشند.

مثال ۴-۴: در گراف‌های زیر، بین دو رأس a و b یال‌های موازی وجود دارد.

شکل ۴-۶.

گرافِ ساده: گرافِ فاقد یال موازی و طوقه را گرافِ ساده می‌نامند. گرافِ سادهٔ جهت‌دار، به‌طور مشابه تعریف می‌شود.

گرافِ چندگانه: گرافی که شامل یال موازی باشد، گرافِ چندگانه گویند. هم‌چنین گرافِ جهت‌دارِ شامل یال موازی، گرافِ چندگانهٔ جهت‌دار نامیده می‌شود.

گرافِ مختلط: گرافی که شامل یال‌های جهت‌دار و غیرجهت‌دار باشد، گراف مختلط می‌نامند.

رئوس مجاور: در گرافِ $G=(V,E)$، دو رأس v و u را مجاورگویند، هرگاه v و u دو سر یک یال در G باشند.

مرتبه و اندازهٔ گراف: تعداد رئوس یک گراف، مرتبهٔ گراف و تعداد یال‌های آن، اندازهٔ گراف نامیده می‌شود. مرتبهٔ گراف با نماد n ($|V|=n$) و اندازهٔ گراف با m ($|E|=m$) نشان داده می‌شود.

☑ گزاره۴-۱:

$$۰\leq m \leq \binom{n}{۲}$$

اثبات:

طبق تعریف گراف، مجموعهٔ یال‌های گراف، زیرمجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های دوعضوی از V می‌باشند، بنابراین حداکثر تعداد یال‌ها برابر با $\binom{n}{۲}$ و حداقل تعداد یال‌ها برای گراف تهی با $m=۰$ است؛ لذا:

$$۰\leq m \leq \binom{n}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲}$$

■

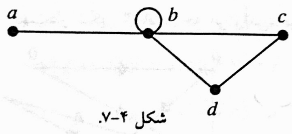
درجهٔ رأس u_i در گراف: تعداد یال‌های متصل به رأس u_i را، درجهٔ آن رأس گویند و با $deg(u_i)$ نشان می‌دهند.

توجه:

درجهٔ رأسی که دارای یال طوقه باشد، استثناء است وهر یالِ طوقه ۲ واحد در درجهٔ رأس، محاسبه می‌شود.

مثال ۴-۵: در گرافِ شکل ۴-۷، درجهٔ رئوس عبارت است از:

$deg(a)=۱$
$deg(b)=۵$
$deg(c)=deg(d)=۲$



شکل ۴-۷.

فرض‌کنید $u_i\in V$ یک رأس دلخواه گرافِ D باشد، آن‌گاه:

درجهٔ ورودی u_i: تعداد یال‌هایی که به رأس u_i وارد می‌شوند، درجهٔ ورودی u_i نامیده و با نماد $id(u_i)$ نشان داده می‌شود.

درجهٔ خروجی u_i: تعداد یال‌هایی که از رأس u_i خارج می‌شوند، درجهٔ خروجی u_i نامیده و با نماد $od(u_i)$ نشان داده می‌شود.

مجموع درجهٔ u_i: مجموع درجه‌های ورودی و خروجی u_i را مجموع درجهٔ آن می‌نامند؛ به عبارت دیگر:

$$deg\,(u_i)=id(u_i)+od(u_i)$$

و لذا مجموع درجه رئوس گرافِ D برابر است با:

$$\sum_{i=۱}^{n} deg\,(u_i)=\sum_{i=۱}^{n} id(u_i)+\sum_{i=۱}^{n} od(u_i)$$

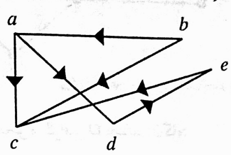
رأس منفرد: رأسی که درجهٔ آن صفر باشد، رأس منفرد یا تنها نامیده می‌نامند.

رأس معلق: رأسی که درجهٔ آن یک باشد، رأس معلق یا آویزان می‌نامند. به همین ترتیب یالی که تنها یک رأس آن، رأس معلق باشد، **یال معلق** می‌نامند.

رأس فرد: رأسی که درجهٔ آن عددی فرد باشد، رأس فرد می‌نامند.

رأس زوج: رأسی که درجهٔ آن عددی زوج باشد، رأس زوج می‌نامند.

مثال ۴-۶: در گرافِ جهت‌دار شکل ۴-۸ درجهٔ هر رأس، مرتبه و اندازهٔ گراف را بیابید.



شکل ۴-۸

حل:

$od(a)=۲$	$id(a)=۱$	$deg(a)=۳$
$od(b)=۲$	$id(b)=۰$	$deg(b)=۲$
$od(c)=۰$	$id(c)=۳$	$deg(c)=۳$
$od(d)=۱$	$id(d)=۱$	$deg(d)=۲$
$od(e)=۱$	$id(e)=۱$	$deg(e)=۲$

$$\sum_{i=۱}^{n=۵} od(u_i)=۶ \qquad \sum_{i=۱}^{n=۵} id(u_i)=۶ \qquad \sum_{i=۱}^{n} deg(u_i)=۱۲$$

بنابراین گراف از مرتبهٔ ۵ ($n=۵$) و اندازهٔ ~~۷~~ 6 ($m=$~~۷~~ 6) می‌باشد.

▶

☑ **قضیه ۴-۱:** در گرافِ $G=(V,E)$، داریم:

$$\sum_{i=۱}^{n} deg(u_i)=۲\,|E|$$

اثبات:

از آنجایی‌که هر یال به دو رأس متصل است، پس در مجموع درجه‌های رئوس، هر یال ۲ بار محاسبه می‌گردد، بنابراین مجموع درجه‌های رئوس گراف، ۲ برابر تعداد یال‌های آن می‌باشد.

■

نتیجه:

در هر گراف، تعداد رئوس با درجهٔ فرد، عددی زوج است.

☑ **قضیه ۴-۲:** درگرافِ $D=(V,E)$ داریم:

$$\sum_{i=۱}^{n} od(u_i)=\sum_{i=۱}^{n} id(u_i)=|E|=m$$

اثبات:

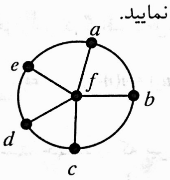
در گرافِ جهت‌دار، هر یال از یک رأس خارج و به رأس دیگر وارد می‌گردد، بنابراین مجموع درجه‌های خروجی رئوس و مجموع درجه‌های ورودی رئوس یکسان و هر دو این مجموع‌ها، همان تعداد یال‌های گراف می‌باشند.

■

رأس ماکزیمم: بزرگ‌ترین درجهٔ در بین درجه‌های رئوس گرافِ $G=(V,E)$ را ماکزیمم درجه نامند و با $\Delta(G)$ نمایش می‌دهند؛ به‌عبارت دیگر: $\Delta(G)=Max\ \{deg(u_i)\mid u_i\in V\}$، رأس متناظر با $\Delta(G)$ را رأس ماکزیمم می‌نامند.

رأس مینیمم: کوچک‌ترین درجه در بین درجه رئوس گرافِ $G=(V,E)$ را مینیمم درجه نامند و با $\delta(G)$ نمایش می‌دهند؛ به‌عبارت دیگر: $\delta(G)=Min\ \{deg(u_i)\mid u_i\in V\}$. رأس متناظر با $\delta(G)$ را رأس مینیمم می‌نامند.

مثال ۴-۷: گرافِ شکل ۴-۹ را درنظر بگیرید. رئوس فرد، زوج گراف و نیز رأس ماکزیمم و مینیمم آن‌را مشخص نمایید.



شکل ۴-۹.

حل:

$deg(a)=deg(b)=deg(c)=deg(d)=deg(e)=۳$ ، $deg(f)=۵$

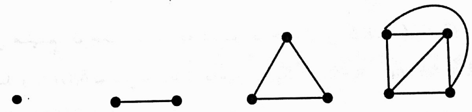
در این گراف، تمامی رئوس از درجهٔ فرد می‌باشند. پس $\Delta(G)=۵$ و $\delta(G)=۳$. رأس f رأس ماکزیمم و مابقی رئوس گراف، رأس مینیمم می‌باشند.

دنبالهٔ درجه‌های گراف: دنباله‌ای نزولی از درجه‌های رئوس گراف را، دنباله درجه‌های گراف گویند.

مثال ۴-۸: دنباله درجه‌های گراف مثال ۴-۷، عبارت است از: ۵,۳,۳,۳,۳,۳ .

۴-۲- گراف‌های سادهٔ خاص

گرافِ کامل: گرافِ سادهٔ G را کامل نامند، هرگاه بین هر دو رأس متمایز آن دقیقاً یک یال موجود باشد. به عبارتی، هر رأسِ گرافِ کامل با $(n-1)$ رأس دیگر، مجاور است. گرافِ کامل n رأسی را با K_n نمایش می‌دهند. گراف‌های کامل K_1، K_2، K_3 و K_4 در شکل ۴-۱۰ نشان داده شده‌اند.



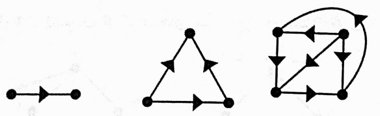
شکل ۴-۱۰.

طبق تعریف گراف کامل، درجهٔ هر رأس درگراف کامل، $(n-1)$ است، بنابراین:

$$2|E|=\sum_{i=1}^{n} deg(u_i)=n(n-1) \quad\Rightarrow\quad |E|=\frac{n(n-1)}{2}$$

تورنمنت: تورنمنت گرافی است جهت‌دار، که بین هر دو رأس متمایز u و v در آن، دقیقاً یک یال وجود داشته باشد. تورنمنتِ n رأسی را با K_n^* نشان می‌دهند.

در شکل ۴-۱۱ چند نمونه تورنمنت نشان داده شده‌است.

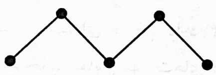


شکل ۴-۱۱.

گرافِ دو بخشی: گرافی که بتوان مجموعه رئوس آن را به دو زیر مجموعهٔ V_1 و V_2 چنان افراز نمود، به‌طوری‌که هر یال آن دارای یک رأس در V_1 و یک رأس در V_2 باشد، گراف دوبخشی نامند. به عبارت دیگر:

$$V=V_1\cup V_2 \quad , \quad V_1\cap V_2=\emptyset$$
$$uv\in E \quad\Rightarrow\quad u\in V_1 \;, v\in V_2$$

مثال ۴-۹: گرافِ زیر، یک گراف دوبخشی است.



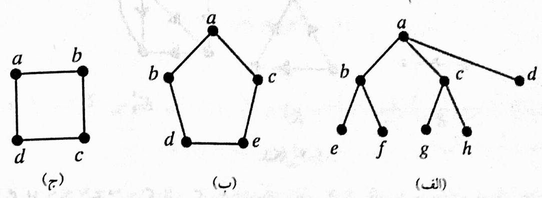
شکل ۴-۱۲. $V_1=\{a,c,e\}$, $V_2=\{b,d\}$

گراف دوبخشیِ کامل: گراف دو بخشی G با مجموعه افرازهای V_1 و V_2 را کامل گویند، هرگاه هر رأسِ بخش V_1 با هر رأس بخش V_2 مجاور باشد. اگر V_1 شامل m رأس و V_2 شامل n رأس باشد، گراف دو بخشیِ کامل فوق با $K_{m,n}$ نشان داده می‌شود.

مثال ۴-۱۰: شکل ۴-۱۳ دو گراف دوبخشی کامل $K_{2,3}$ و $K_{3,3}$ را نشان می‌دهد.

شکل ۴-۱۳.

مثال ۴-۱۱: کدام‌یک از گراف‌های شکل زیر دوبخشی است؟



شکل ۴-۱۴.

حل:

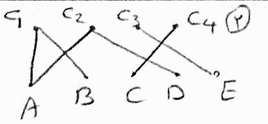
گرافِ (الف) دوبخشی است، با مجموعه رئوس $V_۲=\{b,c,d\}$ و $V_۱=\{a,e,f,g,h\}$.
گرافِ (ب) بنا به تعریف، گراف دوبخشی نمی‌باشد.
گرافِ (ج) دوبخشی است، با مجموعه رئوس $V_۲=\{b,d\}$و$V_۱=\{a,c\}$

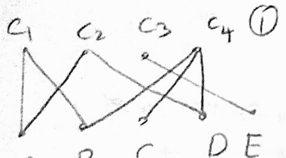
مثال ۴-۱۲: فرض‌کنید موسسه‌ای درنظر دارد ۴ دبیر $C_i\ (i=۱,۲,۳,۴)$، برای تدریس دروس A,B,C,D,E انتخاب نماید. مهارت‌های هر دبیر در جدول زیر نشان داده شده است. هدف تعیین دروس برای هر دبیر است به‌طوری‌که آن دبیر در دروس مورد نظر مهارت داشته باشد و هیچ دو دبیری درس مشترک نداشته باشند.

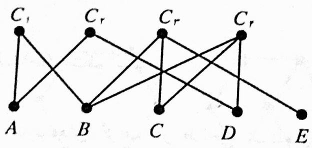
مهارت	دبیر
A,B	$C_۱$
A,D	$C_۲$
B,C,E	$C_۳$
B,C,D	$C_۴$

حل:

ارتباط بین دبیران و مهارت تدریس آن‌ها در دروس را می‌توان با یک گراف دوبخشی با مجموعه رئوس $V_۱=\{C_۱,C_۲,C_۳,C_۴\}$ و $V_۲=\{A,B,C,D,E\}$ به‌صورت شکل ۴-۱۵ نشان داد.

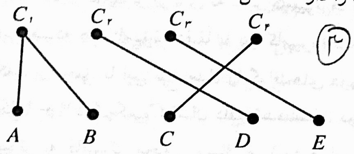






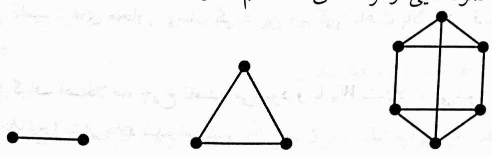
شکل ۴-۱۵.

با توجه به شکل ۴-۱۵، یکی از انتخاب‌ها را می‌توان به‌صورت زیر تعیین نمود:
E رأس معلق و تنها انتخاب آن رأس $C_۳$ است، رئوس E، $C_۳$ و تمامی یال‌های متصل به آن‌ها را حذف نموده؛ رأس انتخابی بعدی، رأس معلق C است که آن‌هم تنها یک انتخاب رأس $C_۴$ را دارد، رأس C و $C_۴$ و تمام یال‌های متصل به آن را نیزحذف نموده؛ رأس معلق D رأس انتخابی بعدی است، که آن‌هم تنها یک انتخاب رأس $C_۲$ را دارد؛ رأس D و $C_۲$ و تمام یال‌های متصل به آن را حذف نموده و در انتها رئوس A و B تنها انتخاب $C_۱$ را دارند؛ شکل۴- ۱۶.



شکل ۴-۱۶.

گراف r- منتظم: برای عددصحیح r $(r\geq ۰)$، گرافِ سادهٔ $G=(V,E)$ را r- منتظم گویند، هرگاه درجهٔ هر رأس آن r باشد؛ به عبارت دیگر، $\forall i\ deg(u_i)=r$.
در شکل زیر، نمونه‌هایی ازگراف‌هایr- منتظم نشان داده شده است.



۳- منتظم ۲- منتظم ۱- منتظم

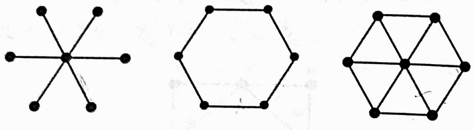
شکل ۴-۱۷.

مثال ۴-۱۳: گراف K_n، $(n-1)$- منتظم است.

مثال ۴-۱۴: یکی از کاربردهای گراف در طراحی شبکه‌های محلی است. فرض‌کنید در یک آپارتمان سیستم‌های کامپیوتری متفاوت با وسایل جانبی از قبیل پرینتر، اسکنر و رسام موجود باشند. برای استفاده بهینهٔ ساکنان قرار است آنها به‌نحوی بهم متصل شوند که ساکنان بتوانند از اطلاعات و امکانات موجود کمال استفاده را نمایند. برای این منظور مدل‌های زیر جهت اتصال این کامپیوترها معرفی می‌شوند:

- **شبکهٔ ستاره‌ای:** در این شبکه یکی از کامپیوترها به‌عنوان کامپیوتر مرکزی در نظرگرفته شده و سایر کامپیوترها به آن متصل می‌شوند. شبکهٔ محلی طراحی شده به این صورت، همانند یک گرافِ کامل دوبخشی $K_{1,n-1}$ است. در این طراحی مطابق شکل ۴-۱۸(الف)، اطلاعات از کامپیوتر مرکزی به سایر کامپیوترها ارسال می‌شود.
- **شبکهٔ حلقه‌ای:** در این شبکه هر کامپیوتر دقیقاً با دو کامپیوتر دیگر متصل است. گراف حاصل از شبکه‌های محلی با این نوع مدل را گراف‌های دور نامند و با C_n نشان می‌دهند. در شکل ۴-۱۸(ب) یک C_6 نشان داده شده است. در این نوع شبکه اطلاعات از یک کامپیوتر به کامپیوتر مجاور ارسال می‌شود و ارسال اطلاعات تا زمانی ادامه دارد که کامپیوترِ ارسال کنندهٔ اطلاعات، مجدداً اطلاعات را دریافت نماید.
- **شبکهٔ ترکیبی:** در این نوع طراحی شبکه، ترکیبی از شبکه‌ی ستاره و حلقه استفاده می‌شود. اطلاعات می‌تواند از کامپیوتر مرکزی به سایر کامپیوترها یا از یک کامپیوتر به سایر کامپیوترهای مجاور ارسال گردد.این ویژگی باعث بالا رفتن قابلیت اطمینان می‌گردد.

این نوع گراف اصطلاحاً، چرخ نامیده می‌شود و با W_n نشان‌داده می‌شود. یک W_7 در شکل ۴-۱۸(ج) نشان داده شده است.



(الف) (ب) (ج)

شکل ۴-۱۸.

۴-۳- زیرگراف و انواع آن

برای درک بهتر مفهوم زیرگراف، به مثال زیر توجه نمایید.

مثال ۴-۱۵: فرض‌کنید شبکهٔ بزرگ مخابراتیِ کشور فقط به اطلاعات مبادله شده بین شهرهای تهران، اصفهان، شیراز و مشهد احتیاج دارد. برای این منظور کافی‌است تمامیِ خطوط ارتباطی بین شهرها بجز خطوط ارتباطیِ که حداقل ۲ شهر از ۴ شهر مذکور را به یکدیگر متصل می‌کند، حذف شود. با این کار، اولاً شهرها به ۴ شهرِ مورد نظر محدود شده، ثانیاً فقط خطوط ارتباطیِ بین این ۴ شهر در دسترس می‌باشد.

زیرگراف: گرافِ $G_1=(V_1,E_1)$ را زیرگرافِ $G=(V,E)$ گویند، هرگاه:

$$E_1 \subseteq E \quad , \phi \neq V_1 \subseteq V$$

گراف G_1، زیر گرافِ سرهٔ گرافِ G است، هرگاه:

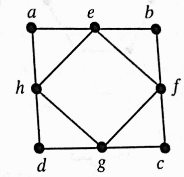
$$E_1 \subset E \quad , \phi \neq V_1 \subset V$$

برخی از زیرگراف‌های ویژه عبارتند از:

زیرگراف فراگیر(پوشا): زیرگرافی که همهٔ رئوس گراف را در برداشته باشد، زیرگراف فراگیر نامیده می‌شود. بنابراین در زیر گرافِ فراگیر، $V_1=V$ و $E_1 \subseteq E$.

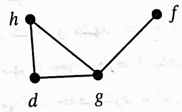
زیرگراف القایی رئوس V_1: زیرگرافی که تمام یال‌هایی از گراف G که دو سر آنها در V_1 است را شامل شود، زیر گراف القائی مجموعه رئوس V_1 نامند.

مثال ۴-۱۶: گرافِ شکل ۴-۱۹ را درنظر بگیرید.



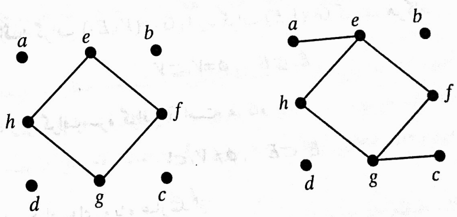
شکل ۴-۱۹.

الف)زیرگرافِ القایی مجموعه رئوس $V_1=\{h,d,g,f\}$ عبارت است از:



شکل ۴-۲۰.

ب) دو نمونه از زیرگراف‌های فراگیر گرافِ فوق عبارت است از:

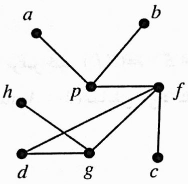


شکل ۴-۲۱.

زیرگراف G-v: زیرگرافی است که از حذف رأس v از مجموعه رئوس گراف G و حذف تمام یال‌های متصل به v بدست می‌آید.

زیرگراف G-e: زیرگرافی است که از حذف یال e از مجموعه یال‌های گراف G به‌دست می‌آید. به‌عبارت دیگر $V(G\text{-}e)=V(G)$ و $E(G\text{-}e)=E(G)-\{e\}$

مثال ۴-۱۷: گرافِ G در شکل زیر داده شده است.

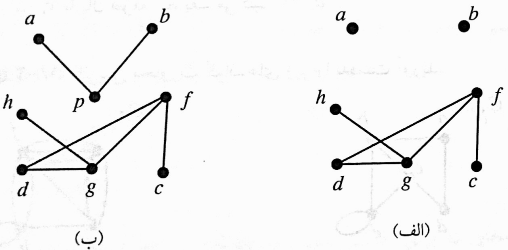


شکل ۴-۲۲.

الف) زیرگراف G-p را به‌دست آورید.

ب) زیرگراف G-pf را به‌دست آورید.

حل:



شکل ۴-۲۳.

۴-۴- نمایش گراف و یکریختی گراف‌ها

۴-۴-۱- نمایش گراف

یکی از مهم‌ترین کاربردهای گراف، مدل‌سازی موضوعات گوناگون مانند طراحی نقشهٔ شبکه بزرگ متروی شهری و آبراه‌ها و بررسی آن‌ها می‌باشد. باتوجه به حجم زیاد

اطلاعات و عدم وجود فضای کافی، می‌توان از ماتریس برای نمایش گرافِ این نقشه‌ها استفاده نمود. در ادامه، ماتریس مجاورت و ماتریس وقوع، که ماتریس‌هایی برای نمایش گراف می‌باشند، معرفی می‌شوند. با استفاده از این دو ماتریس، به‌عنوان مثال می‌توان ارتباط نقاط شهری با یکدیگر و یا ارتباط هریک از نقاط شهری با یکی از خطوط ارتباطی را نمایش داد.

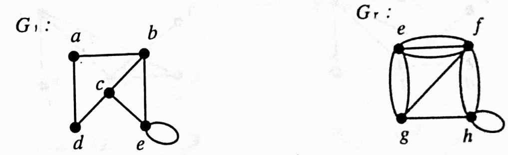
ماتریس مجاورتِ گراف: فرض‌کنید $G=(V,E)$، گراف سادهٔ n رأسی باشد. ماتریسِ مجاورت گراف G را با $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ (A_G) نمایش می‌دهند که در آن:

$$a_{ij}=\begin{cases} 1 & v_iv_j\in E \\ 0 & v_iv_j\notin E \end{cases}$$

و $v_i, v_j\in V$.

ماتریس مجاورت برای گراف دارای طوقه و یا یال‌های چندگانه نیز تعریف‌می‌شود، در این‌صورت ماتریس مجاورت، ماتریسی با درایه‌های صفر- یک نمی‌باشد، زیرا برای رئوس v_i و v_j با یال‌های چندگانه، a_{ij} برابرِ تعداد یال‌های بین آن دو رأس می‌باشد؛ و برای هر رأس v_i با یال طوقه، تعریف می‌کنیم: $a_{ii}=1$.

مثال ۴-۱۸: ماتریس مجاورتِ گراف‌های زیر را به‌دست آورید.



شکل ۴-۲۴.

حل:

$$A_{G_1}=\begin{array}{c} \\ a\\ b\\ c\\ d\\ e \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad , \quad A_{G_2}=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e & f & g & h \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ e\\ f\\ g\\ h \end{array}$$

نکات زیر در ماتریس مجاورت گراف برقرار است:

- ماتریس مجاورت گراف، متقارن است.
- درگراف‌های فاقد طوقه، مجموع درایه‌های هر سطر یا ستون با درجهٔ رأس نظیر آن سطر یا ستون، برابر است. درصورت وجود طوقه در گراف، به ازای هر طوقه، به مجموع سطر یا ستون متناظر، یک واحد اضافه می‌شود.
- درگراف‌های فاقد طوقه، مجموع درایه‌های ماتریس با مجموع درجه‌های گراف، برابر است. به عبارت دیگر:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=2\,|E|$$

درصورت وجود طوقه درگراف، به ازای هر طوقه، به مجموع فوق یک واحد اضافه می‌شود.

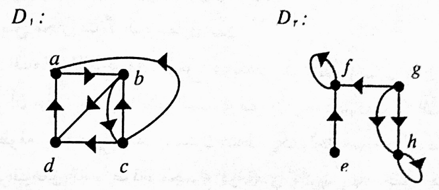
- در گرافِ سادهٔ G، درایهٔ قطر اصلی ماتریس A^2، درجهٔ رئوس گراف را نشان‌می‌دهد.

ماتریس مجاورت گرافِ جهت‌دار: فرض‌کنید $D=(V,E)$ گرافی بدون یال چندگانه با n رأس باشد. ماتریسِ مجاورت گرافِ D نیز با $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ (A_G) نمایش داده می‌شود که در آن برای هر $v_i, v_j\in V$ داریم:

$$a_{ij}=\begin{cases} 1 & (v_i,v_j)\in E \\ 0 & (v_i,v_j)\notin E \end{cases}$$

ماتریس مجاورت برای گرافِ جهت‌دار چندگانه نیز تعریف‌می‌شود، در این‌صورت ماتریس مجاورت، ماتریسی با درایه‌های صفر- یک نمی‌باشد ، برای رئوس v_i و v_j با یال‌های چندگانه، a_{ij} برابر تعداد یال‌های است که از رأس v_i خارج و به رأس v_j وارد می‌شود.

مثال ۴-۱۹: ماتریس مجاورتِ گراف‌های شکل ۴-۲۵ را به‌دست آورید.



شکل ۴-۲۵.

حل:

$$A_{D_1}=\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{و} \quad A_{D_2}=\begin{array}{c} \\ e \\ f \\ g \\ h \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e & f & g & h \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

◀

نکات زیر در ماتریس مجاورت گرافِ جهت‌دار برقرار است:

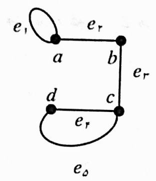
- ماتریس مجاورت گرافِ جهت‌دار، الزاماً متقارن نیست.
- در ماتریس مجاورت گرافِ جهت‌دار، جمع درایه‌های هرسطر با درجهٔ خروجی رأس متناظر آن سطر در گراف، برابر است.
- در ماتریسِ مجاورت گرافِ جهت‌دار، جمع درایه‌های هرستون با درجهٔ ورودی رأسِ متناظر آن در گراف برابر است.

ماتریس وقوع گراف: فرض‌کنید گرافِ $G=(V,E)$، دارای n رأس و m یال باشد، قراردهید $E=\{e_j : j=1,2,\ldots,m\}$ ماتریس وقوعِ G با $M=[m_{ij}]_{n\times m}$ (M_G) نمایش داده می‌شود؛ که در آن هر m_{ij} ارتباط بین رأس v_i و یال e_j را نشان می‌دهد، و:

$$m_{ij}=\begin{cases} 1 & e_j=v_iv_k\in E \ \text{یا}\ e_j=v_kv_i\in E \\ 0 & \text{درغیر این صورت} \end{cases}$$

که $v_i, v_j\in V$.

مثال ۴-۲۰: ماتریس وقوعِ گراف زیر را بیابید.



شکل ۴-۲۶.

حل:

درگرافِ فوق $V=\{a,b,c,d\}$ و $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$ می باشد. ماتریس وقوع، یک ماتریس ۵×۴ است که سطرهای آن معرف رئوس گراف و ستون‌های آن بیانگر یال‌های گراف است؛ بنابراین:

$$M_G=\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

◀

نکات زیر در ماتریس وقوع گراف، برقرار است:

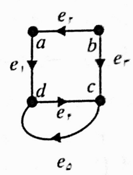
- مجموع اعداد در هر ستون ۲ است؛ زیرا هر ستون معرف یک یال بوده و هر یال تنها دوسر دارد. در صورتی‌که گراف دارای یال طوقه باشد، مجموع اعداد ستون مذکور، ۱ خواهد بود.
- در گرافِ فاقد یال طوقه، مجموع اعداد در هر سطر برابر با درجهٔ آن رأس است؛ زیرا هر سطر بیانگر تعداد یالی است که رأس متناظر یکی از دو سر آن است.

ماتریس وقوعِ گراف جهت‌دار: فرض‌کنید گرافِ جهت‌دار $D=(V,E)$ دارای n رأس و m یال باشد، قراردهید $E=\{e_j : j=1,2,...,m\}$ ماتریس وقوعِ D را با $M=[m_{ij}]_{n\times m}$ (M_D) نمایش داده می‌شود؛ که در آن هر m_{ij} ارتباط بین رأس v_i و یال e_j را نشان می‌دهد، و:

$$m_{ij}=\begin{cases} -1 & e_j=(v_i,v_k)\in E \\ 1 & e_j=(v_k,v_i)\in E \\ 0 & \text{درغیر این صورت} \end{cases}$$

و $v_i,v_j\in V$

مثال ۴-۲۱: ماتریس وقوع گراف زیررا بیابید.



شکل ۴-۲۷.

حل:

$$M_D=\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

نکات زیر در ماتریس وقوع گراف جهت‌دار، برقرار است:

- مجموع اعداد در هر ستون ۰ است؛ زیرا هر ستون معرف یک یال بوده و هر یال تنها دوسر دارد.
- درهر سطر مجموع (۱)ها با درجهٔ ورودی، مجموع (۱-)ها با درجه خروجی و مجموع قدرمطلق آن‌ها، با درجهٔ رأس متناظر آن سطر، برابر است.

با توجه به خصوصیت و ویژگی‌های ماتریس مجاورت و ماتریس وقوع، این سؤال مطرح می‌شودکه: حافظه‌ای که ماتریس وقوع نیازدارد بیشتراست یا حافظه مورد نیاز ماتریس مجاورت؟ به‌عبارت دیگر، استفاده از کدام نوع ماتریس مقرون به‌صرفه است؟ پاسخ به این سؤال کاملاً بستگی به نوع گراف و به‌خصوص تعداد یال‌ها دارد؛ به‌این مفهوم‌که، درگراف تهی، ماتریس وقوع از اندازه $|E|\times|V|=0$است، ولی ماتریس مجاورت همواره از اندازه $|V|\times|V|$ می‌باشد؛ اما بدترین حالت زمانی‌است که گراف کامل باشد؛ دراین حالت، تعداد یال‌های ماتریس مجاورت مضربی از $|V|\times|V|=|V|^2$ و تعداد یال‌های ماتریس وقوع مضربی از $|V|^3$ است؛ بنابراین حجم ماتریس مجاورت در این حالت کم‌تر است.

۴-۴-۲- یکریختی گراف‌ها

گراف‌های یکریخت: دو گرافِ ساد$G_1=(V_1,E_1)$ و $G_2=(V_2,E_2)$ را یکریخت گویند، هرگاه یک تابع یک به یک و پوشا مانند $f: V_1\rightarrow V_2$ بتوان یافت طوری‌که:

$$\forall\ v_i, v_j\in V_1: \qquad v_iv_j\in E_1 \Leftrightarrow f(v_i)f(v_j)\in E_2$$

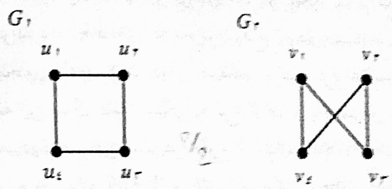
شرایط لازم برای یکریختی:

بنا به تعریفِ یکریختی، برای اینکه دوگرافِ G_1 و G_2 یکریخت باشند، باید:

- $|E_1|=|E_2|$, $|V_1|=|V_2|$
- تعداد رئوس از درجهٔ k در گرافِ G_1 با تعداد رئوس از درجهٔ k در گرافِ G_2، برابر است.

برای بیان ویژگی f (حفظ ارتباط رئوس با یکدیگر در دو گراف)، می‌توان نشان داد ماتریس مجاورت گرافِ G_1 با ماتریس مجاورت گراف G_2 مطابق با سطر و ستون‌هایِ تابعِ تعریف شده روی G_1 ، یکسان هستند؛ به عبارت دیگر با انجام اعمال سطری و یا ستونی مقدماتی از ماتریس G_1، می‌توان به ماتریس G_2 رسید.

مثال ۴-۲۲: آیا دو گراف G_1 و G_2 یکریخت می‌باشند؟



شکل ۴-۲۸.

حل:

تابع یک به یک و پوشای $f: G_1 \to G_2$ را می‌توان مطابقِ شکل ۴-۲۸، به‌صورت زیر تعریف نمود:

$f(u_1)=v_1$ $\quad$ $f(u_2)=v_2$ $\quad$ $f(u_3)=v_3$ $\quad$ $f(u_4)=v_4$

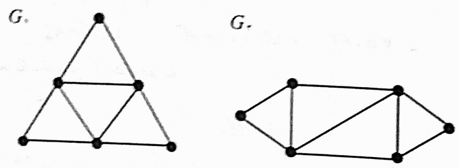
برای مشاهده حفظ ارتباط رئوس با یکدیگر، نشان‌می‌دهیم ماتریس مجاورت گراف G_1 با ماتریس مجاورت گراف G_2، یکسان است.

$$A_{G_1}=\begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{و} \quad A_{G_2}=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

مثال ۴-۲۳: آیا دو گراف G_1 و G_2، در شکل ۴-۲۹، یکریخت می‌باشند؟

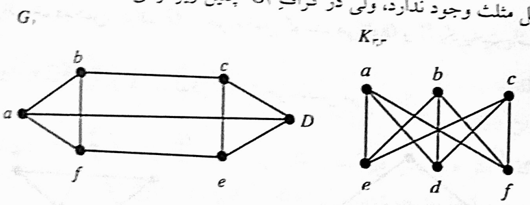
حل:

با توجه به شکل، هر دو گراف دارای ۶ رأس و ۹ یال می‌باشند، بنابراین باید تابع یک به یک و پوشایی را بیابیم که تحت آن گراف G_1 به گرافِ G_2 تبدیل شود؛ به عبارت دیگر، این تابع باید درجهٔ رئوس در گراف را حفظ نماید. از طرفی درجه‌های رئوس گراف G_1 به ترتیب صعودی برابر است با ۲,۲,۲,۴,۴,۴ و درجه‌های رئوس گراف G_2 به ترتیب صعودی برابر است با ۲,۲,۳,۳,۴,۴. بنابراین این دو گراف یکریخت نمی‌باشند.



شکل ۴-۲۹.

مثال ۴-۲۴: دو گراف زیر را درنظر بگیرید. هر دو گراف دارای ۶ رأس، ۹ یال و دنباله درجه‌های ۳,۳,۳,۳,۳,۳ می‌باشند، ولی این دو گراف یکریخت نیستند؛ زیرا در گراف $K_{3,3}$، ۳ رأس a، b و c وجود دارد که دو به دو با یکدیگر مجاور نمی‌باشند، ولی در گراف G_1 نمی‌توان ۳ رأس با این ویژگی یافت؛ به‌بیان دیگر در گرافِ $K_{3,3}$ زیرگرافی به شکل مثلث وجود ندارد، ولی در گرافِ G_1 چنین زیرگرافی وجود دارد.



شکل ۴-۳۰.

مثال ۴-۲۵: گراف $K_{m,n}$ و گراف $K_{n,m}$ یکریخت است.

۴-۵- مکملِ گراف

مکملِ گراف: فرض‌کنید $G=(V,E)$، گرافِ سادهٔ n رأسی باشد. گراف مکمل G گراف ساده‌ای است که رئوس آن همان مجموعهٔ V و یال‌های آن، یال‌هایی است که در گراف G وجود ندارد. گرافِ مکمل را با نماد $\overline{G}=(V,\overline{E})$ نشان می‌دهند.

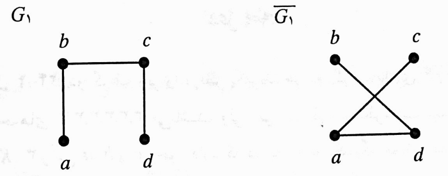
بنابراین:

$$\forall u,v\in V:\ uv\notin E \Leftrightarrow uv\in\overline{E} \qquad , \ G\cup\overline{G}=K_n$$

با توجه به تعریف مکملِ گراف، داریم:

$$|E|+|\overline{E}|=\frac{n(n-۱)}{۲}$$

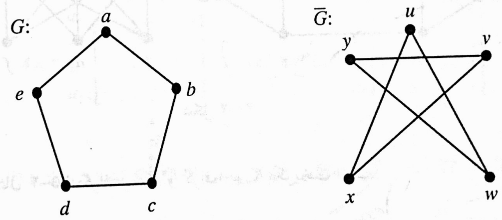
مثال ۴-۲۶: در شکل زیر، گراف $G_۱$ و مکمل آن نشان داده شده است.



شکل ۴-۳۱.

گرافِ خودمکمل: گرافِ G را خودمکمل گویند، هرگاه G و $\overline{G}$ یکریخت باشند.

مثال ۴-۲۷: آیا دو گرافِ شکل ۴-۳۲ خودمکمل می‌باشند؟



شکل ۴-۳۲.

حل:

بله، تابع یک به یک و پوشای $f: G\rightarrow \overline{G}$ به صورت زیر را درنظر می‌گیریم:

$f(a)=u \qquad f(b)=\overset{w}{\cancel{y}} \qquad f(c)=\overset{y}{\cancel{v}} \qquad f(d)=\overset{v}{\cancel{w}} \qquad f(e)=x$

ملاحظه می‌شود ماتریس مجاورت دو گراف نیز یکسان است.

$$A_{\overline{G}}=\begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e\\ \hline a & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱\\ b & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰\\ c & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰\\ d & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱\\ e & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰\end{array} \quad , \quad A_G=\begin{array}{c|ccccc} & u & y & v & w & x\\ \hline u & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱\\ y & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰\\ v & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰\\ w & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱\\ x & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰\end{array}$$

مثال ۴-۲۸: آیا گرافی که دارای ۱۰ رأس است، می‌تواند خودمکمل باشد؟

حل:

طبق تعریف گراف خودمکمل، تعداد یال‌های G و $\overline{G}$ با هم برابر می‌باشند، و بر اساس رابطهٔ $G\cup\overline{G}=K_{۱۰}$، مجموع یال‌های آن‌ها با تعداد یال‌های $K_{۱۰}$، یعنی $\frac{۱۰(۱۰-۱)}{۲}=۴۵$ برابراست؛ لذا نمی‌توان ۴۵ یال را به دو قسمت مساوی تقسیم کرد، پس چنین گرافی خود مکمل نیست.

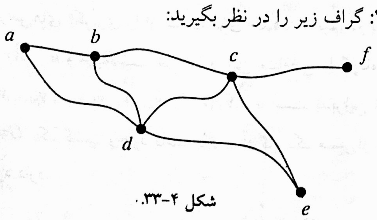
۴-۶- مسیر و دور در گراف

گشت: یک گشت از رأس u به رأس v، دنباله‌ای از رئوس و یال‌هاست که از رأس u شروع و به رأس v ختم می‌شود.

گذر: اگر هیچ یالی در گشت تکراری نباشد، آنرا گذر گویند؛ اگر $u= v$ (یعنی رأس ابتدا و انتها یکسان باشد)، آنرا **مدار** یا **گذر بسته** گویند.

مسیر: اگر هیچ رأسی در گشت تکراری نباشد، آنرا مسیر گویند؛ اگر $u= v$، آنرا **دور** یا یک **مسیر بسته** گویند.

مثال ۴-۲۹: گراف زیر را در نظر بگیرید:



شکل ۴-۳۳.

در این گراف:

- گشت $bcdecf$ یک گذر است.
- گشت $bcdecf$ مسیر نیست، زیرا رأس c در آن تکرار شده است.
- گشت $fceda$ یک گذر است. این گشت مسیر نیز می‌باشد.
- گشت $abdceda$ یک گذر است و چون دو رأس ابتدا و انتها یکی است، این گشت، مدار نیز می‌باشد.
- گذر $abdceda$ چون دارای رأس تکراری d است، بنابراین مسیر نیست.
- گشت $abcda$ یک مسیر است، و از آنجا که دو رأس ابتدایی و انتهایی یکی است، این مسیر دور نیز می‌باشد.

طول گشت: تعداد یال‌های پیموده شده در گشت از رأس u به رأس v، طول آن گشت نامیده می‌شود.

گزاره ۴-۲: اگر بین دو رأس u و w در گرافِ $G=(V,E)$ یک گشت وجود داشته باشد، آن‌گاه یک مسیر از رأس u به رأس w در گراف وجود دارد.

اثبات:

چون یک گشت از u به w وجود دارد، پس یکی از گشت‌ها با کوتاه‌ترین طول را انتخاب می‌کنیم. به عنوان نمونه، گشت $w, v_n, \dots, v_2, v_1, u$. اگر این گشت، مسیر نباشد، در این حالت داریم: $w, v_n, \dots, v_{m+1}, v_m, v_{m-1}, \dots, v_{k+1}, v_k, v_{k-1}, \dots, v_2, v_1, u$ به‌طوری‌که برای $k<m$ داریم: $v_k=v_m$ ؛ این امکان‌پذیر است، زیرا برای $k=0$ ، $u=v_m$ و برای $k=n+1$، $v_k=w$.

حال اگر رأس‌های تکراری را از گشت فوق حذف نماییم، دراین صورت گشت کوتاهی بین دو رأس u و w به‌دست می‌آید و این متناقض با کوتاه‌ترین گشت‌بودن $w, v_n, \dots, v_{m+1}, v_m, v_{m-1}, \dots, v_{k+1}, v_k, v_{k-1}, \dots, v_2, v_1, u$ u است. بنابراین اگر بین دو رأس در گرافِ $G=(V,E)$ یک گشت وجود داشته باشد، آن‌گاه یک مسیر از رأس u به رأس w در گراف وجود دارد.

■

قضیه ۴-۳: فرض‌کنید A ماتریس مجاورت گراف $G=(V,E)$ یا گراف جهت‌دار $D=(V,E)$ (شامل یال موازی ویا طوقه) باشد؛ آن‌گاه تعداد مسیرهای متفاوت به‌طول k از رأس v_i به رأس v_j برابر است با درایهٔ a_{ij} در ماتریس A^k.

اثبات:

فرض‌کنید A ماتریس مجاورت گراف G با مجموعه راس‌های $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$. با استقرا روی تعداد مسیرها، می‌توان حکم را ثابت نمود.

بنابه تعریف ماتریس مجاورت، تعداد مسیرها به‌طول ۱ از v_i به v_j متناظربا درایهٔ $a_{i,j}$ در A است.

فرض‌استقرا: فرض‌کنید تعداد مسیرهای متفاوت به‌طول k از v_i به v_j متناظر با درایهٔ $a_{i,j}$ در A^k باشد.

می‌دانیم $A^{k+1}=A^k.A$، بنابراین درایهٔ $a_{i,j}$ در A^{k+1} برابر با $\sum_{r=1}^{n} b_{i,r}a_{r,j}$ است، که در آن $b_{i,r}$ متناظر با درایهٔ $a_{i,r}$ در A^k است. باتوجه به فرض استقراء، $b_{i,r}$ تعداد مسیرها به‌طول k از v_i به v_r می‌باشد. یک مسیر به‌طول $(k+1)$ از v_i به v_j، از مسیری به‌طول k از v_i به v_r(v_r دلخواه) و یک یال از v_r به v_j به‌دست می‌آید. $b_{i,r}$ تعداد مسیرها به‌طول k از v_i به v_r و $a_{r,j}$ تعداد یال‌ها از v_r به v_j می‌باشد، بنابراین $b_{i,r}a_{r,j}$ تعداد مسیرها به‌طول $(k+1)$ از v_i به v_j، با عبوز ازهر رأس دلخواه v_r است؛ بنابراین تعداد کل مسیرهای متفاوت به‌طول $(k+1)$ از v_i به v_j، برابر با $\sum_{r=1}^{n} b_{i,r}a_{r,j}$ است.

■

مثال ۴-۳۰: گرافِ شکل ۴-۳۴ را درنظر بگیرید.

الف) چند مسیر متفاوت به‌طول ۳ بین دو رأس a و b وجود دارد؟

ب) چند نمونه از مسیرهای متفاوت بین دورأس a و b، به‌طول‌های ۳,۲,۱ و ۴ را بیابید.

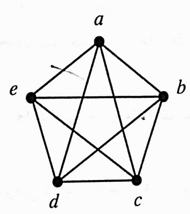
حل:

الف) طبق قضیهٔ ۴-۳، ۱۳ مسیرمتفاوت بین این دو رأس وجود دارد

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow A^3 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 12 & 13 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 12 & 13 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 12 \end{bmatrix} \end{array}$$

ب)

- ab : مسیر به‌طول ۱ .
- aeb,adb,acb : مسیرهایی به‌طول ۲.
- $aedb,aecb,adeb,adcb,acdb,aceb$: چند نمونه ازمسیرهایی به‌طول ۳.
- $aedcb,aecdb,acdeb,acedb,adceb,adecb$: چند نمونه از مسیرهایی به‌طول ۴.



شکل ۴-۳۴.

۴-۶-۱- گراف همبند

گراف همبند: گرافِ $G=(V,E)$ را همبند گویند، هرگاه بین هردو رأس آن، حداقل یک مسیر موجود باشد، درغیر این‌صورت گراف را ناهمبند گویند.

مؤلفه(مؤلفهٔ همبندی): هرگرافِ ناهمبند، شامل چندین زیرگراف همبند است، که هرکدام رایک مؤلفهٔ همبندی می‌نامیم.

همبندی در گرافِ جهت‌دار:

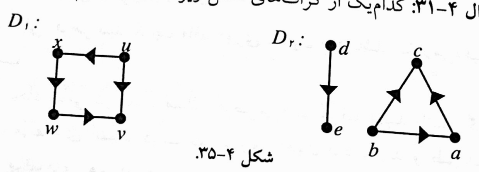
در گراف‌های جهت‌دار، سه نوع همبندی به شرح زیر مطرح می‌شود:

همبند قوی: گرافِ جهت‌دار را همبند قوی گویند، هرگاه بین هر دو رأس دلخواه آن، حداقل یک مسیر جهت‌دار وجود داشته‌باشد.

همبند یک‌طرفه: گرافِ جهت‌دار را همبند یک‌طرفه گویند، هرگاه بین هر دو رأس دلخواه آن، حداقل از یک‌طرف مسیر وجود داشته‌باشد.

همبند ضعیف: گرافِ جهت‌دار را همبندضعیف گویند، هرگاه بدون درنظرگرفتن جهت، بین هر دو رأس دلخواه آن مسیری موجود باشد. به‌عبارت دیگر، گراف زمینهٔ آن همبند باشد.

مثال ۴-۳۱: کدام‌یک از گراف‌های شکل زیر، همبند و کدام‌یک ناهمبند هستند؟



شکل ۴-۳۵.

حل:

گراف D_1 همبند یک‌طرفه و گراف D_2 ناهمبند و دارای دو مؤلفهٔ همبندی است.

رأس برشی: رأس v در گرافِ همبند G، رأس برشی نامیده می‌شود، هرگاه زیرگرافِ $G\text{-}v$ ناهمبند شود.

پل: یال e، یک پل برای گرافِ همبند G است، هرگاه زیرگرافِ $G\text{-}e$ ناهمبند باشد.

مثال ۴-۳۲: در گرافِ مثال ۴-۲۹، رأس c، رأس برشی و یال cf، پل می‌باشد.

قضیه ۴-۴: گرافِ سادهٔ $G=(V,E)$، دوبخشی است اگر و تنها اگر فاقد دوری به‌طول فرد باشد.

اثبات:

شرط لازم: فرض‌کنید گرافِ سادهٔ G دوبخشی است، نشان‌می‌دهیم فاقد دوری به‌طول فرد است.

فرض‌کنید $G=V_1 \cup V_2$ که در آن $V_1=\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}$ و $V_2=\{w_1,w_2,\ldots,w_n\}$. با توجه به ساختار گرافِ دوبخشی، هر دور در گرافِ دوبخشی به یکی از صورت‌های زیر است:

$v_{i_1}, w_{j_1}, v_{i_2}, w_{j_2}, \ldots, v_{i_s}, w_{j_s}, v_{i_1}$

$w_{k_1}, v_{l_1}, w_{k_2}, v_{l_2}, \ldots, v_{l_r}, w_{k_r}, w_{k_1}$

درحالت اول طول دور $2s$ و درحالت دوم طول دور $2r$ می‌باشد؛ بنابراین گراف دوبخشی G، فاقد دوری به‌طول فرد است.

شرط کافی: فرض‌کنید گراف فاقد دوری به‌طول فرد باشد، نشان‌می‌دهیم گراف دوبخشی است.

بدون ایجاد خللی در کلیت مسأله، فرض‌می‌کنیم گراف همبند باشد(اگر گراف همبند نباشد، مؤلفه‌های همبندِ گراف نیز، دوری به‌طول فرد ندارند و طبق اثباتی که ارائه‌می‌شود، مؤلفه‌های همبند، دوبخشی خواهند شد و درنتیجه، گراف دوبخشی خواهد بود).

فرض‌کنید a یک رأس دلخواه از G باشد، بنابه همبندی گراف، بین هر دو رأس دلخواه آن، حداقل یک مسیر وجود دارد؛ تعریف می‌کنیم:

$V_1=\{v \in V \mid$ مسیری به‌طول زوج از a به v باشد $\}$

$V_2=V-V_1$

بنابراین $a \in V_1$(مسیری به‌طول صفر است)؛ با استفاده ازبرهان خلف می‌توان نشان‌داد $V_1 \cap V_2=\emptyset$ (اثبات برعهدهٔ دانشجو)، بنابراین V_1 و V_2 مجموعهٔ V را افرازمی‌کنند. ادعامی‌کنیم V_1 و V_2 مستقل می‌باشند؛ به‌عبارت دیگر، هیچ دو رأس مجموعهٔ V_1 به‌هم متصل نمی‌باشند و هم‌چنین هیچ دو رأس مجموعهٔ V_2 به‌هم متصل نمی‌باشند.

فرض‌کنید $u,v \in V_1$، پس از a به u و از a به v به ترتیب مسیرهایی به‌طول زوج مانند $a \to v_i \to v_{i+1} \to \ldots \to v_{i+k} \to u$ و $a \to w_j \to w_{j+1} \to \ldots \to w_{j+s} \to v$ وجود دارد؛ اگر یال uv موجود باشد، آن‌گاه طول دورِ زیر، فرد است؛ و این متناقض با فرض مسأله می‌باشد.

$$a \to v_i \to v_{i+1} \to \ldots \to v_{i+k} \to u \to v \to w_{j+s} \to \ldots \to w_{j+1} \to w_j \to a \quad ,$$

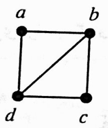
بنابراین هیچ‌کدام از رئوس مجموعهٔ V_1 با هم در ارتباط نمی‌باشند؛ به‌همین ترتیب اعضای مجموعه V_2 نیز با هم در ارتباط نیستند. پس گراف G دوبخشی است. ■

۴-۶-۲- گراف اویلری

گذر اویلری: گذری که از تمام یال‌های گراف عبورکند، گذر اویلری می‌نامند. به‌عبارت دیگر، گشتی که از تمام یال‌های گراف، فقط یکبار عبور نماید، گذر اویلری گویند.

مدار اویلری: مداری که از تمام یال‌های گراف عبورکند، مدار اویلری نام دارد. به‌عبارت دیگر، مدار اویلری، گشتی که از تمام یال‌های گراف فقط یکبار عبور نموده و به نقطهٔ شروع بازگردد. گراف دارای مدار اویلری، **گراف اویلری** نامیده می‌شود.

مثال ۴-۳۳: گراف شکل زیر،گذر اویلری $bcdbad$ دارد، ولی مداراویلری ندارد.



شکل ۴-۳۶.

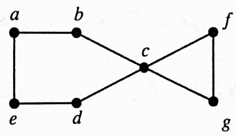
☑ **قضیه ۴-۵:** گرافِ همبند(چندگانه) G دارای مدار اویلری است، اگر و تنها اگر G همبند بوده و درجهٔ تمام رئوس آن زوج باشد.
اثبات در [۴] قضیهٔ ۳-۱۱ بیان شده است.
■

☑ **قضیه ۴-۶:** گرافِ همبند(چندگانه)G دارای گذر اویلری است اگر و تنها اگر G دقیقاً دارای دو رأس از درجهٔ فرد باشد.
اثبات در [۴] قضیهٔ ۲-۱۱بیان شده است.
■

طبق قضیهٔ ۴-۶، گذر اویلری، از یک رأس فرد شروع و به رأس فرد دیگر، ختم می‌شود.

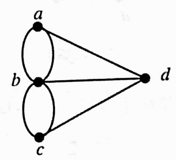
مثال ۴-۳۴: طبق قضیهٔ ۴-۵، گراف $K_{m,n}$ برای m و n زوج، اویلری است.

مثال ۴-۳۵: طبق قضیهٔ ۴-۵، گراف زیر مدار اویلری دارد و *bcfgcdeab, cfgcdeabc, abcfgcdea* همگی مدارهای اویلری آن می‌باشند.



شکل ۴-۳۷.

مثال ۴-۳۶: گذر و مدار اویلری را در گراف شکل ۴-۳۸، در صورت وجود بیابید.



شکل ۴-۳۸

حل:

$$deg(a)=deg(c)=deg(d)=3,\qquad deg(b)=5$$

طبق قضیهٔ ۴-۵ ، گراف فوق مدار اویلری ندارد؛ گراف ۴ رأس از درجهٔ فرد دارد و بنا به قضیهٔ ۴-۶ گذر اویلری نیز ندارد.

☑ **قضیه ۴-۷:** گرافِ (چندگانه) D دارای مدار اویلری جهت‌دار است اگر و تنها اگر D همبند ضعیف بوده و درجهٔ ورودی هر رأس برابر درجهٔ خروجی آن باشد. یعنی:

$$\forall u_i \in V \quad od(u_i)=id(u_i)$$

اثبات در [۴] فصل ۱۱ بیان شده است.

■

☑ **قضیه ۴-۸:** گرافِ(چندگانه) D دارای گذر اویلری آن است اگر و تنها اگر D همبند ضعیف بوده و به غیر از دو رأس v_1 و v_2، درجهٔ ورودی و خروجی سایر رئوس برابر باشند و برای دو رأس v_1 و v_2 داشته باشیم:

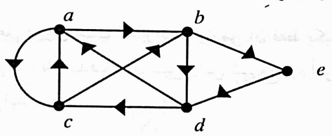
$$id(v_1)=od(v_1)+1$$
$$od(v_2)=id(v_2)+1$$

در این صورت، گذر اویلری از رأس v_2 شروع و به رأس v_1 ختم می‌شود.

اثبات در [۴] فصل ۱۱ بیان شده است.

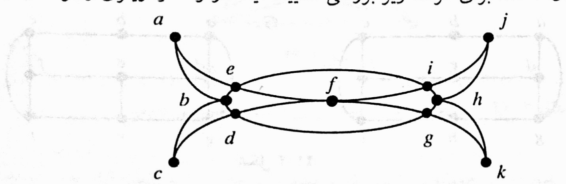
■

مثال ۴-۳۷: مدار اویلریِ گرافِ جهت‌دار شکل زیرعبارتست از: *abedcacbda*



شکل ۴-۳۹.

مثال ۴-۳۸: برای گراف زیر بررسی نمایید، آیا گذر و مدار اویلری وجود دارد یا خیر؟



شکل ۴-۴۰.

حل:

طبق قضیهٔ ۴-۵، گراف مدار اویلری دارد، به‌عنوان نمونه *abdghijhkgfdcbeifea* یک مدار اویلری آن است. واضح است که گذر اویلری ندارد.

۴-۶-۳- گراف همیلتونی

مسیر همیلتونی: مسیری است که از تمامی رئوس گراف عبور کند. به‌عبارت دیگر، گشتی که از تمام رئوس گراف فقط یکبار عبور نماید، مسیر همیلتونی نامیده می‌شود.

دور همیلتونی: دوری است که از تمامی رئوس گراف عبور کند. به‌عبارت دیگر، گشتی که از تمام رئوس گراف فقط یکبار عبور نماید و به رأس شروع بازگردد، دور همیلتونی نامیده می‌شود. به گرافی که دور همیلتونی دارد، **گراف همیلتونی** گویند.

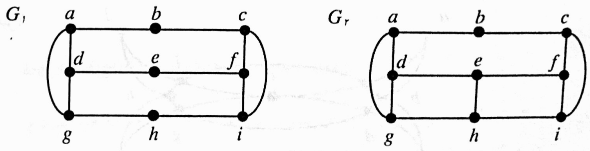
گزاره ۴-۳: اگرگرافِ G دارای دورهمیلتونی باشد، آن‌گاه G دارای مسیرهمیلتونی است.

اثبات:

بنابرفرض، گراف شامل دوری است که از تمام رئوس آن فقط یکبار عبور کرده و به رأس شروع باز می‌گردد ، با حذف یال بین رأس شروع و رأس خاتمهٔ دور، مسیر همیلتونی به‌دست می‌آید.

■

مثال ۴-۳۹: در گراف‌های زیر مسیر و دور همیلتونی را بررسی نمایید.

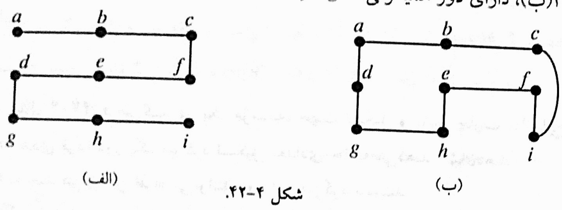


شکل ۴-۴۱.

حل:

گراف G_1 دور همیلتونی ندارد، ولی مطابق شکل ۴-۴۲(الف) دارای مسیر همیلتونی *abcfedghi* است.

گراف G_2، طبق گزارهٔ ۴-۴، دارای مسیر همیلتونی *abcifedgh* و مطابق شکل ۴-۴۲(ب)، دارای دور همیلتونی *abcifehgda* است.

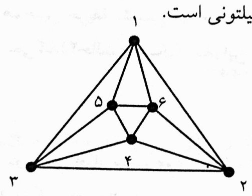


شکل ۴-۴۲.

باتوجه به مثال قبل، نتایج مفیدی جهت یافتن دور همیلتونی به‌دست می‌آید، ازآن‌جمله:

- اگر گراف G همیلتونی باشد، آن‌گاه داریم: $\forall v\in V: deg(v)\geq 2$.
- اگر $\exists v\in V: deg(v)=2$ ، آن‌گاه دو یال مجزا و متصل به v، باید دردور همیلتونی قرارداشته باشند.

مثال ۴-۴۰: گراف هشت وجهی مقابل، یک گراف همیلتونی است. در این گراف دور ۱۲۳۴۵۶۱ یک دور همیلتونی است.



شکل ۴-۴۳.

مثال ۴-۴۱: نشان‌دهید گراف K_n برای $n>2$ همیلتونی است.

حل:

بنابر تعریف، دوری همیلتونی است که از تمام رأس‌های گراف فقط یکبار عبور نماید.

به ترتیب زیر می‌توانیم دورهمیلتونی را بسازیم: از هر رأس دلخواهِ گراف شروع می‌کنیم، چون بین هر دو رأس گرافِ کامل یالی وجود دارد، پس بین هر دو رأس گراف، مسیری به‌طول یک می‌باشد؛ بنابراین می‌توانیم بدون تکرار رأسی، از هر رأس گراف به رأس دیگر رفت تا به آخرین رأس گراف برسیم، از طرفی بین رأس ابتدایی و رأس انتهایی مسیر، نیز یالی موجود است که با طی این مسیر، دور همیلتونی حاصل می‌شود.

◀

مثال ۴-۴۲: فرض‌کنید در یک مؤسسه، جهت تشکیل و تأیید چارت سازمانی، n نفر(n عددی فرد) دور یک میزگرد تشکیل تعدادی جلسه می‌دهند. نشان‌دهید:

الف) به چند طریق این افراد می‌توانند دور این میزگرد بنشینند.

ب) اگر قرارباشد درهرجلسه، هر نفر تنها با دو نفر مجاور خود مذاکره نماید به‌طوری‌که در روزهای قبل مذاکره‌ای با آن دو صورت نگرفته است. چند جلسه باید به این طریق تشکیل‌شود قبل از اینکه دو نفر برای بار دوم باهم مذاکره نمایند؟

حل:

الف) می‌دانیم n نفر به تعداد $n!$ می‌توانند کنار یکدیگر بنشینند. از طرفی چون دور میزگرد می‌نشینند، بنابراین مکان‌هایی که نفر اول برای نشستن انتخاب می‌کند یکسان است(n حالت یکسان)، هم‌چنین طریقهٔ نشستن در جهت عقربه‌های ساعت یا خلاف آن حالت جدیدی ایجاد نمی‌کند(۲حالت یکسان)، بنابراین تعداد حالت برابر است با $\frac{(n-1)!}{2} = \frac{n!}{2n}$.

ب) این مثال را می‌توان با دو روش افراز مجموعه و استفاده از دور همیلتونی حل‌نمود.

روش اول: n نفر $v_1,\dots,v_n$ تشکیل دور $v_1,\dots,v_n,v_1$ می‌دهند، بنا به فرض مسأله هر نفر باید با $(n-1)$ نفر دیگر مذاکره نماید، به‌طوری‌که در هر جلسه مجاز است فقط با دو نفر مذاکره نماید که قبلاً مذاکره‌ای با آن دو نداشته است، این بدان معنی است که $(n-1)$ نفر باید به مجموعه‌های ۲ عضوی افراز شوند؛ بنابراین تعداد جلسه‌های موردنیاز، همان تعداد افرازها یعنی $\frac{(n-1)}{2}$ می‌باشد.

روش دوم: برای حل، گراف K_n با n رأسِ فرد درنظر می‌گیریم. گراف دارای $\frac{n(n-1)}{2}$ یال است. ازطرفی هر دورهمیلتونی دارای n یال است، بنابراین حداکثر $\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n} = \frac{(n-1)}{2}$ دور همیلتونی وجود دارد که یال مشترک ندارند.

◀

☑ **قضیه ۴-۹:** فرض‌کنید $G=(V,E)$ گرافی n رأسی و فاقد طوقه باشد. اگر به ازای هر u و v دلخواه داشته باشیم: $deg(u) + deg(v) \geq n-1$، آن‌گاه: G دارای مسیر همیلتونی است.

اثبات در [۴] فصل ۱۱ بیان شده است.

■

☑ **قضیه ۴-۱۰:** در گرافِ سادهٔ G، اگر برای هر $v \in V$ داشته باشیم: $deg(v) \geq \frac{(n-1)}{2}$، آن‌گاه G دارای مسیر همیلتونی است.

اثبات در [۴] فصل ۱۱ بیان شده است.

■

☑ **قضیه ۴-۱۱:** فرض‌کنید $G=(V,E)$ گرافی فاقد طوقه و $|V|=n\geq 3$. اگر برای هر دو رأس غیرمجاور u و v داشته باشیم: $deg(u) + deg(v) \geq n$، آن‌گاه G دارای دور همیلتونی است.

اثبات در [۴] فصل۱۱ بیان شده است.

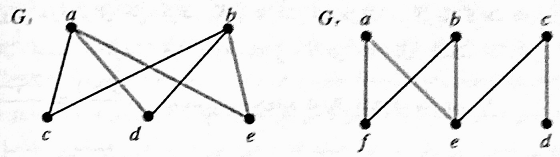
■

☑ **قضیه ۴-۱۲:** اگر درجهٔ هر رأس گرافِ G، حداقل $\frac{n}{2}$ باشد، آن‌گاه G دورهمیلتونی دارد.

اثبات در [۴] فصل۱۱ بیان شده است.

■

مثال ۴-۴۳: کدام‌یک از گراف‌های دوبخشی زیر، دارای مسیر و دور همیلتونی هستند.



شکل ۴-۴۴.

حل:

گراف G_1 یک گراف $k_{2,3}$ است و طبق قضیهٔ ۴-۱۲، دورهمیلتونی ندارد. این گراف دارای مسیرهای همیلتونی cadbe و dbeac است.

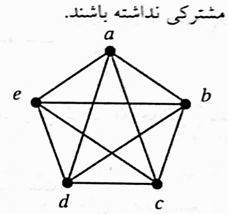
گراف G_2 دور همیلتونی ندارد؛ زیرا $deg(d)=1$. این گراف دارای مسیر همیلتونی afbecd است.

▶

مثال ۴-۴۴: ۵ دانشجوی یک کلاس تصمیم گرفته‌اند، که هر شب شام را باهم و دور یک میزگرد صرف کنند. برای این منظور به هنگام صرف شام هر یک در کنار دو نفری می‌نشینند که در روزهای پیش کنار آن‌ها ننشسته‌اند. برای چند روز می‌توانند این کار را انجام دهند؟

حل:

پاسخ این مسأله، معادل این است که تعداد دورهای همیلتونی در k_5 محاسبه شوند، به‌طوری‌که با یکدیگر یال مشترکی نداشته باشند.

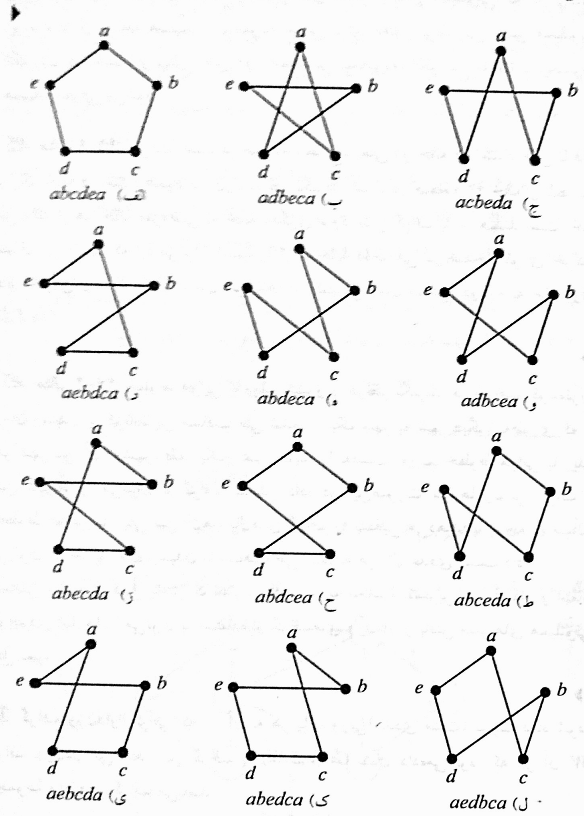


شکل ۴-۴۵.

با توجه به مثال ۴-۴۲، تعداد دورهای همیلتونی k_5 برابر است با $12=\frac{(5-1)!}{2}$. از این تعداد، $2=\frac{(5-1)}{2}$ دور با یال‌های غیر مشترک وجود دارند.

در شکل ۴-۴۵ دورهای همیلتونی k_5 نشان داده شده است. مشاهده می‌شود، گراف شکل‌های ۴-۴۶(الف) و ۴-۴۶(ب) یال مشترکی ندارند.

▶



شکل ۴-۴۶.

۴-۶-۳-۱- کاربردهایی از مسیرها و دورهای همیلتونی

برای درک بهتر، ابتدا دو نمونه از کاربردهای مسیر و دور همیلتونی که در زندگی روزمره با آن مواجه هستیم، بیان نموده؛ سپس برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر همیلتونی، الگوریتم دیجکسترا و برای یافتن دور همیلتونی نیمه‌بهینه، الگوریتم قاعدهٔ نزدیک‌ترین همسایه معرفی می‌شود.

مثال ۴-۴۵: حرکت اسب در صفحه شطرنج، یعنی دو خانه در امتداد افقی یا قائم و یک خانه در امتداد عمود بر آن‌را، درنظر بگیرید. اسب در صفحهٔ ۶۴ خانه‌ای شطرنج، می‌تواند از هر خانهٔ مفروضی به خانهٔ دیگری برود؛ پس گرافِ بازی همبند است. حال سؤال این است که آیا می‌توان اسب را از هرخانهٔ دلخواهی در صفحه طوری حرکت داد که پس از فقط یکبار اشغال هرخانه، در کمترین زمان ممکن، دوباره به خانهٔ اولیه بازگردد؟

▶

مثال ۴-۴۶: خطوط هوایی یا ریلی کشور را درنظر بگیرید. می‌خواهیم کوتاه‌ترین زمان رسیدن یا کوتاه‌ترین مسافت طی شده، از یک شهر به شهر دیگر، به‌طوری که از هر شهر بین آن دوشهر، فقط یکبار عبورنماید، را به‌دست آوریم. خطوط هوایی یا ریلی بین شهرها را می‌توان با گراف نمایش داد؛ در این‌صورت شهرها رئوس گراف و خطوط هوایی یا ریلی بین آن‌ها، یال‌های گراف را تشکیل می‌دهند؛ با توجه به مسأله، می‌توان متناظر با زمان رسیدن یا مسافت طی‌شده، به هر یال عددی نسبت داد.
مسائلی مشابه از قبیل یافتن کوتاه‌ترین مسیر و یا محاسبهٔ کمترین هزینهٔ نقل و انتقال موجودی انبارها را می‌توان با استفاده از گراف‌های وزن‌دار و یافتن مسیرهای همیلتونی حل نمود.

▶

گرافِ وزن‌دار: گرافی که در آن به هر یال، وزنی(عددی مثبت) نسبت داده شود، گراف وزن‌دار می‌نامند. این گراف با $G=(V,E,W)$ نشان داده‌می‌شود، که در آن W، مجموعهٔ وزن‌های گراف می‌باشد.

- **الگوریتم دیجکسترا**

فرض‌کنید $G=(V,E,W)$ یک گرافِ وزن‌دار و u و v دو رأس از آن باشد. مسأله اصلی یافتن مسیری بین این دو رأس است، به‌طوری‌که کم‌ترین وزن را داشته باشد. در صورت وجود، به چنین مسیری کوتاه‌ترین مسیر بین u و v می‌گویند.

الگوریتم دیجکسترا، یک روش برای یافتن چنین مسیری است که مراحل آن به صورت زیر است.

۱. با شروع از رأس u، $P=\{u\}$ و $T=V-\{u\}$ مقداردهی می‌شود. برای هر $t\in T$، $l(t)=W(u,t)$ که $l(t)$ کوتاه‌ترین مسیر ممکن از u به t است ($W(u,t)$ وزن یال ut است و اگر یالی بین u و t وجود نداشته باشد $W(u,t)=\infty$).

۲. فرض‌کنید $x\in T$ رأسی باشد که کوتاه‌ترین مسیر را نسبت به اعضای P دارد، اگر $x=v$ باشد، الگوریتم خاتمه می‌یابد؛ درغیر این‌صورت، قرارمی‌دهیم:

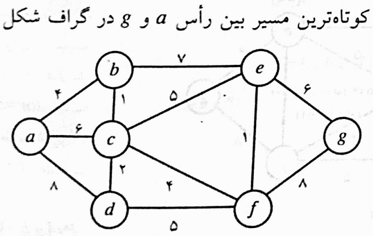
$$P'=P\cup\{x\} \quad , \quad T'=T-\{x\}$$

و برای هر $t\in T'$ تعریف می‌کنیم:

$$l'(t)=Min\{\, l(t)\,,\, l(t)+W(x,t)\,\}$$

این مرحله با جایگزینی P با P' و T با T'، تکرار می‌شود.

مثال ۴-۴۷: کوتاه‌ترین مسیر بین رأس a و g در گراف شکل ۴-۴۷، را به‌دست آورید.



شکل ۴-۴۷.

حل:

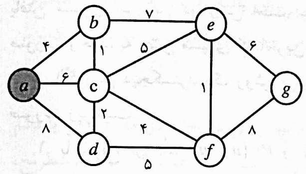
مراحل الگوریتم و بررسی وضعیت هر رأس در ادامه توضیح داده شده است.

مرحله ۱:

در این مرحله رأس a انتخاب می‌شود. بنابراین خواهیم داشت:

$P=\{a\}$

$T=\{b,c,d,e,f,g\}$

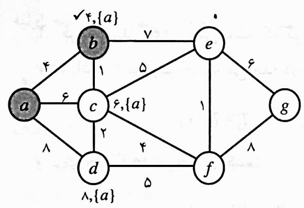


مرحله ۲:

با توجه به رئوسِ P مسیرهایی که از رأس a شروع شده و کوتاه‌ترین وزن را نسبت به رئوس مجموعهٔ T دارند، عبارتنداز: $ab=۴$، $ac=۶$ و $ad=۸$ پس کوچک‌ترین مسیر، $ab=۴$ است. بنابراین رأس b انتخاب می‌شود.

$P=\{a,b\}$

$T=\{c,d,e,f,g\}$

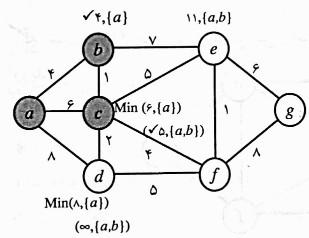


مرحله ۳:

با توجه به رئوسِ P مسیرهایی که از رأس a شروع شده و یا از b می‌گذرد و کوتاه‌ترین وزن را نسبت به رئوس مجموعهٔ T دارند، عبارتند از: $ac=۶$، $ad=۸$ و $abc=۵$ است. کوچک‌ترین مسیر مربوط به $abc=۵$ است. بنابراین رأس c انتخاب می‌شود.

$P=\{a,b,c\}$

$T=\{d,e,f,g\}$

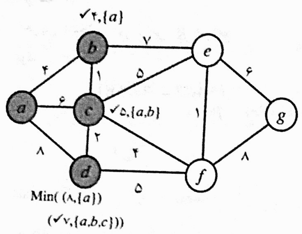


مرحله ۴:

مسیر رئوس P با دیگر رئوسِ مجموعهٔ T یعنی $\{d,e,f,g\}$ محاسبه می‌شود. همان‌طور که در شکل مقابل مشخص است، کوچک‌ترین مسیر مربوط به رأس d است و فاصله آن ۷ است.

$P=\{a,b,c,d\}$

$T=\{e,f,g\}$

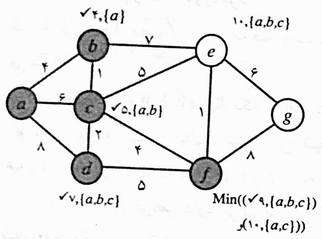


مرحله ۵:

همان‌طور که در شکل مقابل نشان داده است، انتخاب بعدی رأس f است.

$P=\{a,b,c,d,f\}$

$T=\{e,g\}$

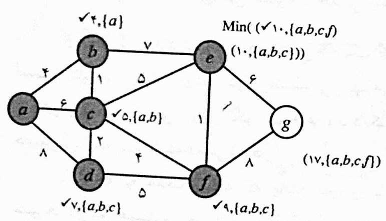


مرحله ۶:

انتخاب بعدی با توجه به مقادیر نشان داده شده در شکل، رأس e است.

$P=\{a,b,c,d,f,e\}$

$T=\{g\}$



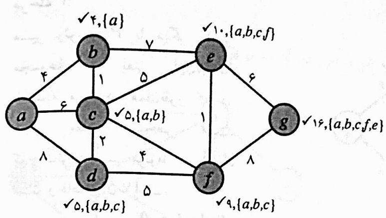
مرحله ۷:

آخرین انتخاب نیز رأس g خواهد بود.

$P=\{a,b,c,d,f,e,g\}$

$T=\{\}$

۱۶



- **مسأله فروشنده دوره‌گرد**

مسألهٔ فروشندهٔ دوره‌گرد، با هدف به‌دست آوردن دورهمیلتونی نیمه‌بهینه تعریف می‌شود.

فرض‌کنید $K_n=(V,E,W)$ یک گراف کاملِ وزن‌دار با n رأس باشد. در این گراف، رئوس به منزلهٔ شهرها، یال‌ها مسیر بین شهرها و $W(i,j)$ مسافت یا هزینه لازم برای عبور از مسیری است که دو شهر i و j را به هم وصل کرده است.

فروشنده‌ای درنظر دارد برای فروش کالای خود طوری حرکت‌نماید که از هر شهر فقط یکبار عبورکند و سرانجام به شهر خود بازگردد، به‌طوری‌که مسافت‌های طی شده(هزینه صرف شده برای طی مسیرها) حداقل باشد.

از آنجا که تعداد دورهای همیلتونی در یک گراف کامل با n رأس، برابر با $\frac{(n-1)!}{2}$ است، بنابراین پیدا نمودن دور همیلتونی بهینه، به‌خصوص برای nهای بزرگ، امکان‌پذیرنیست. از این رو از الگوریتم قاعدهٔ نزدیک‌ترین همسایه برای پیدا نمودن دور همیلتونی نیمه بهینه استفاده می‌شود.

با توجه به هدف مسأله که یافتن دوری با ماکزیمم یا مینیمم مجموع طول مسیرها در دورهمیلتونی می‌باشد، منظور از دور همیلتونی‌بهینه، دور همیلتونی‌است که هدف مسأله را برآورده سازد و با انتخاب هر دور دیگری، نتوان به هدف مسأله نائل آمد؛ هم‌چنین به دورهمیلتونی که نزدیک‌ترین مقدار هدف را با دور همیلتونی بهینه داشته باشد، دورهمیلتونی نیمه‌بهینه گویند.

- **قاعدهٔ نزدیک‌ترین همسایه**

برای به‌دست آوردن دورهمیلتونی نیمه‌بهینهٔ H در یک گراف، می‌توان از روش قاعدهٔ نزدیک‌ترین همسایه استفاده نمود. این الگوریتم به ترتیب زیرعمل می‌نماید:

۱. $H=\emptyset$ را مجموعهٔ یال‌ها و $P=\{\}$، مجموعهٔ رئوس انتخاب شده برای دور همیلتونی نیمه بهینه درنظر گرفته‌می‌شود.

۲. فرض‌کنید $x\in V$ رأسی دلخواه باشد. این رأس به‌عنوان اولین رأس P درنظر گرفته می‌شود. بنابراین $P=\{x\}$، هم‌چنین مقدار متغیر a را برابر $a=x$ قرارمی‌دهیم.

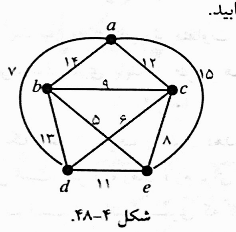
۳. برای $i=1$ تا $j=n-1$ مراحل زیر انجام می‌شود:

۳-۱.اگر $y\notin P$ و $y\in V$ رأسی باشد که $W(x,y)$ مینیمم باشد، بنابراین $H=H\cup\{xy\}$ و $P=P\cup\{y\}$ (xy یالی‌است که به مجموعهٔ H اضافه می‌شود).

۳-۲. $x\leftarrow y$ و به ابتدای مرحلهٔ ۳-۱ بازگشته و الگوریتم ادامه پیدا می‌کند.

۴. در آخرین مرحله $H=H\cup\{xa\}$ (xa یالی است که اولین رأس انتخابی و آخرین رأس انتخابی را به هم وصل می‌کند).

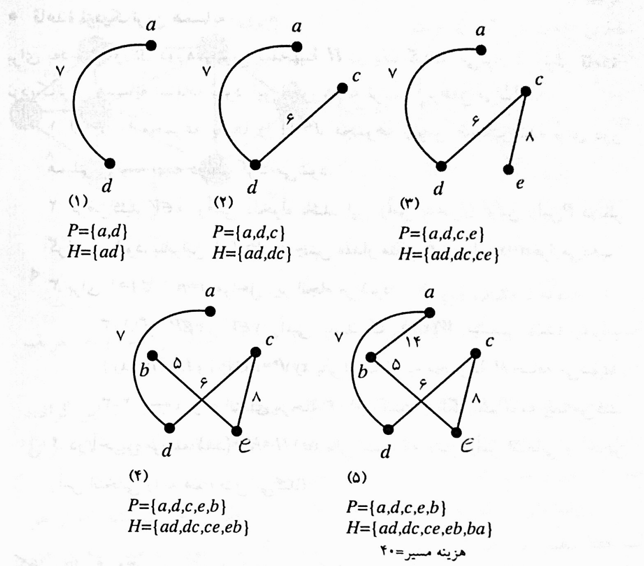
مثال ۴-۴۸: با استفاده از قاعدهٔ نزدیک‌ترین همسایه، دور همیلتونی نیمه‌بهینه را برای گراف شکل ۴-۴۸ بیابید.



شکل ۴-۴۸.

حل:

در ابتدا $P=\{a\}$ حال در ادامه، مراحل دور همیلتونی به صورت زیر است:



شکل ۴-۴۹.

▶

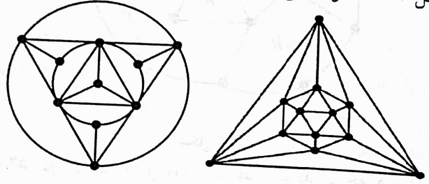
مثال ۴-۴۹: در یک فرآیند نیاز به n کامپیوتر متفاوت است (هر کامپیوتر وظیفهٔ منحصربفرد خود را انجام می‌دهد). کاری باید از طریق همهٔ این کامپیوترها، نه به ترتیب خاص، به انجام برسد.

فرض‌کنید هر کامپیوتر یک رأس از گراف را نشان دهد. آن‌گاه هر مسیرهمیلتونی در این گراف یک برنامهٔ زمانی است. اگر C_{ij} زمان لازم برای رفتن کار از کامپیوتر i به j باشد، مسألهٔ بهینه‌سازی عبارت است از، یافتن مسیری که کمترین مجموع هزینه‌های C_{ij} را داشته باشد.

▶

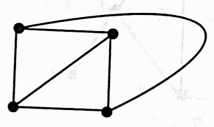
۴-۷- گراف مسطح

گراف مسطح: گراف $G=(V,E)$ را مسطح گوییم، هرگاه بتوان آن‌را به گونه‌ای در صفحه رسم کرد که یال‌های آن (به جز در رئوس ابتدا و انتها) همدیگر را قطع نکنند. گراف‌های شکل ۴-۵۰، نمونه‌هایی از گراف‌های مسطح می‌باشند:



شکل ۴-۵۰.

مثال ۴-۵۰: به وضوح گراف‌های K_1، K_2 و K_3 مسطح می‌باشند. می‌توان نشان داد که گراف K_4 نیز مسطح است؛ برای این‌منظور کافی‌است، نشان‌دهیم گراف K_4 با گرافِ شکل ۴-۵۱ یکریخت است(برعهدهٔ دانشجو).



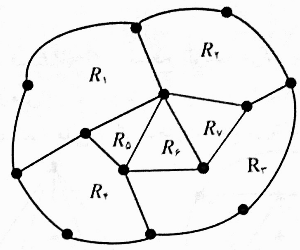
شکل ۴-۵۱.

▶

ناحیه (وجه): در ترسیم گراف مسطح، قسمتی از شکل که توسط تعدادی یال محصور شده است، ناحیه یا وجه می‌نامیم.

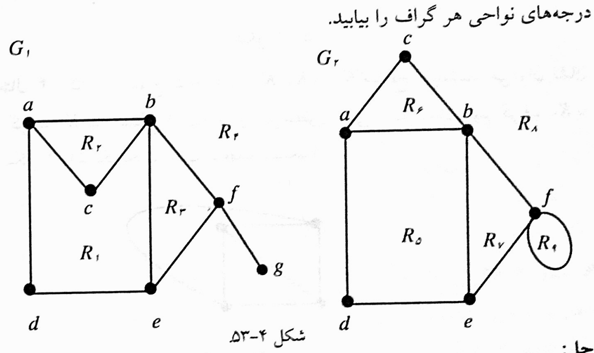
درجهٔ ناحیه: طول کوتاه‌ترین گشتِ بستهٔ دور تا دور مرز هر ناحیه را، درجهٔ آن ناحیه می‌نامیم. درجهٔ هر ناحیه را با $deg(R_i)$ نشان می دهند.

مثال ۴-۵۱: گراف زیر، دارای ۷ ناحیهٔ داخلی $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7$ و یک ناحیه خارجی R_8 می‌باشد؛ بنابراین گراف فوق، ۸ ناحیه دارد.



شکل ۴-۵۲

مثال ۴-۵۲: دو گراف G_1 و G_2 را درنظر بگیرید. درجهٔ هر ناحیه و مجموع درجه‌های نواحی هر گراف را بیابید.



شکل ۴-۵۳

حل:

G_1: $deg(R_1)=5$

$deg(R_4)=7$ $\qquad \sum_{i=1}^{4} deg(R_i) = 18$

$deg(R_2)=deg(R_3)=3$

G_2: $deg(R_5)=4$

$deg(R_6)=deg(R_7)=3$ $\qquad \sum_{i=5}^{8} deg(R_i) = 18$

$deg(R_8)=7$

$deg(R_9)=1$

☑ **گزاره ۴-۴:**

فرض‌کنید $G=(V,E)$ گرافی همبند و مسطح با $|R|$ ناحیه باشد. آن‌گاه داریم:

$$\sum_{i=1}^{|R|} deg(R_i) = 2\,|E|$$

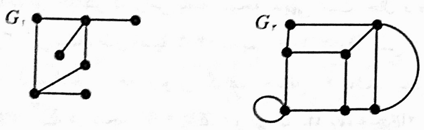
اثبات:

بنا به تعریف درجه، اگر یال معلق باشد، برای محاسبهٔ درجهٔ ناحیه، از روی آن ۲ بار عبور می‌کنیم. یال طوقه، ناحیه‌ای از درجهٔ ۱ و یال‌های موازی ناحیه‌هایی از درجهٔ ۲ به‌وجود می‌آورند؛ از طرفی هر یال دقیقاً روی مرز دو ناحیه قرار دارد، پس هر یال در مجموع درجه‌های نواحی، ۲ بار محاسبه می‌شود و بنابراین حکم ثابت می‌گردد. ■

☑ **قضیه ۴-۱۳ (فرمول اویلر):** فرض‌کنید $G=(V,E)$ گرافی همبند و مسطح با $|V|$ رأس، $|E|$ یال و $|R|$ ناحیه باشد، در این‌صورت $|R|-|E|+|V|=2$

اثبات در [7] قضیهٔ ۹-۷-۱ بیان شده است. ■

مثال ۴-۵۳: فرمول اویلر را برای گراف‌های G_1 و G_2 اعمال کنید.



شکل ۴-۵۴

حل:

گراف G_1:

$|V|=7,\ |E|=7,\ |R|=2 \rightarrow |R|-|E|+|V|=2$

گراف G_2:

$|V|=7,\ |E|=11,\ |R|=6 \rightarrow |R|-|E|+|V|=2$

☑ **قضیه ۴-۱۴:** فرض‌کنید $G=(V,E)$ گرافی ساده، همبند و مسطح با حداقل ۳ رأس باشد، در این‌صورت $|E|\leq ۳|V|-۶$ و $۲|E|\geq ۳|R|$.

اثبات:

بنابه تعریف درجهٔ ناحیه و اینکه گراف ساده است، درجه هر ناحیهٔ آن، حداقل ۳ می باشد. بنابراین:

$$۲|E|=\sum_{i=1}^{|R|} deg(R_i)\geq ۳|R|$$

با توجه به فرمول اویلر و رابطهٔ فوق داریم:

$$|R|-|E|+|V|=۲ \rightarrow ۲=|R|-|E|+|V|=۲\leq (\tfrac{۲}{۳})|E|-|E|+|V| \rightarrow |E|\leq ۳|V|-۶$$

■

نتیجه:

فرض‌کنید $G=(V,E)$ گرافی ساده، همبند با حداقل ۳ رأس و $|E|>۳|V|-۶$ باشد، در این‌صورت گرافِ G نامسطح است.

☑ **گزاره ۴-۵:** فرض‌کنید $G=(V,E)$ گرافی ساده، همبند و مسطح باشد، در این‌صورت درجهٔ رئوس گراف از ۵ تجاوز نخواهدکرد.

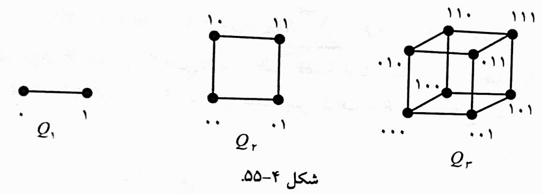
اثبات:

اگر گرافِ G دارای حداکثر دو رأس باشد، نتیجه بدیهی است. حال فرض‌کنید گراف دارای حداقل۳ رأس باشد، طبق قضیهٔ ۴-۱۴ داریم: $|E|\leq ۳|V|-۶$ ، پس $۲|E|\leq ۶|V|-۱۲$.

برهان خلف: فرض‌کنید درجهٔ رئوس گراف حداقل ۶ باشد، بنابر قضیهٔ ۴-۱ $\sum_{i=1}^{|V|} deg(v_i)=۲|E|$، در نتیجه $۲|E|\geq ۶|V|$ و این با $۲|E|\leq ۶|V|-۱۲$ تناقض دارد. بنابراین فرض خلف باطل است و درجهٔ رئوس گرافِ ساده، همبند و مسطح حداکثر ۵ است.

■

گراف n- مکعب (Q_n) : گرافی است که رئوس آن مشخص‌کننده ۲^n رشته بیتی به طول n است. دو رأس در این گراف فقط در صورتی مجاور هستند که در یک بیت اختلاف داشته باشند.



شکل ۴-۵۵.

گراف‌های Q_1، Q_2، Q_3 در شکل ۴-۵۵ نشان داده شده است.

برای رسم Q_n، می‌توان ۲ بار گرافِ Q_{n-1} را رسم کرد و دو رأس هم‌شماره را به‌هم متصل نمود. اگر برچسب رئوس L باشد، یک قسمت را تبدیل به $0L$ و قسمت دیگر را تبدیل به $1L$ نموده و اتصال رئوس طبق قاعده انجام می‌پذیرد.

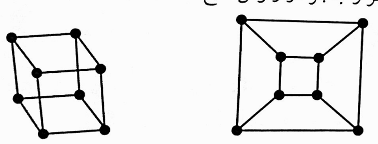
مثال ۴-۵۴: نشان‌دهید:

الف) گراف Q_3 مسطح است.

ب) گراف‌های $K_{3,3}$، K_5 مسطح نمی‌باشند.

حل:

الف) همان‌طور که در شکل زیر مشاهده می‌شود، گرافِ Q_3 را می‌توان طوری رسم‌نمود که یال‌ها، همدیگر را به‌جز در رئوس قطع نکنند.



شکل ۴-۵۶.

ب) گراف K_5، گرافی ساده و همبند با ۱۰ یال و ۵ رأس است، بنابر نتیجهٔ ذیل قضیهٔ ۴-۱۴ ، داریم : $۹=۶-۱۵=۶-|V|۳ < |E|=۱۰$، پس گرافِ K_5 مسطح نمی‌باشد.

برای نشان‌دادن نامسطح بودن گرافِ $K_{3,3}$ از برهان خلف استفاده می‌کنیم:

فرض کنید گرافِ $K_{3,3}$ مسطح باشد، طبق تعریف گراف دوبخشی کامل، درجهٔ هر ناحیه در ترسیم مسطح این گراف، حداقل ۴ است. بنابراین:

$$deg\ (R_i) \geq 4 \rightarrow 2|E| = \sum_{i=1}^{|R|} deg(R_i) \geq 4|R| \quad \Rightarrow |E| \geq 2|R|$$

گراف $K_{3,3}$ ۶ رأس و ۹ یال دارد و طبق قضیهٔ اویلر $|R|=5$. از رابطهٔ بالا داریم: $10 = 2|R| > |E| = 9$، و این یک تناقض است. پس گرافِ $K_{3,3}$ نیز نامسطح است.

▶